# 11. El concepto natural del paralelismo y la perpendicularidad

El concepto de *paralelismo* es frecuente en las ciencias e ingenierías, e inclusive en el arte y la arquitectura. Es un concepto familiar a todos; por ejemplo, es relativamente fácil determinar si dos tablas están paralelas o no. No obstante, definir dicho concepto, matemáticamente trae consigo múltiples beneficios prácticos.

El concepto de *perpendicularidad* también es algo familiar y aparece en muchas construcciones geométricas en las ciencias, ingenierías y otras disciplinas. Este concepto también tiene asociada una explicación matemática.

En esta unidad abordaremos el significado del paralelismo y la perpendicularidad desde el punto de vista matemático. Esto nos proporcionará una herramienta que nos permite, por un lado, establecer la condición de paralelismo o perpendicularidad entre rectas y, por otro lado, construir rectas que se desea sean paralelas o perpendiculares a otra.

***Nociones de paralelismo y/o perpendicularidad.***
***Un concepto sencillo de paralelismo y perpendicularidad***

El concepto de ***paralelo*** está relacionado en el sentido de que las rectas, de alguna forma, deben tener la misma inclinación. Otra observación, que se puede hacer, es que si está una más arriba que la otra, estas se pueden extender de manera infinita y nunca se tocarán.

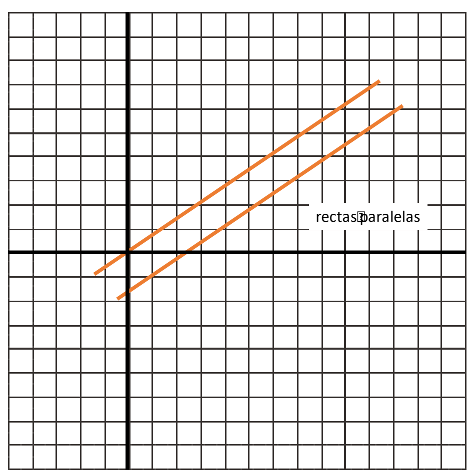


Figura 33. Dos rectas paralelas en el plano cartesiano

El concepto de ***perpendicular*** es cuando dos rectas se cruzan formando un ángulo de 90 grados. Por lógica dos rectas perpendiculares, a diferencia de las paralelas, se crucen en algún punto. Como nota, observa que los ejes X y Y son perpendiculares.

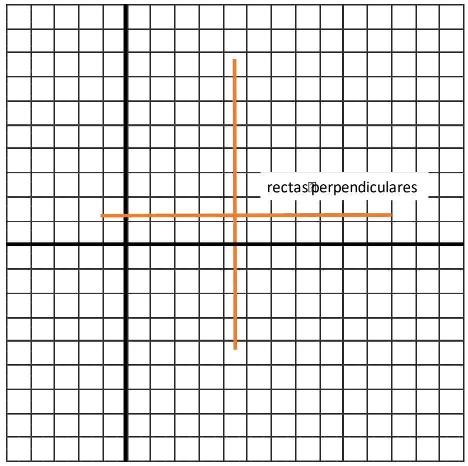


Figura 34. Dos rectas perpendiculares en el plano cartesiano

Tanto el paralelismo y la perpendicularidad tienen una explicación matemática con la cual trabajaremos más adelante.

***Breve recordatorio de la recta***

Para lograr una descripción matemática del paralelismo y la perpendicularidad se requiere recordar las propiedades de la recta y sus parámetros.

Brevemente, se proporciona este recordatorio de los parámetros que componen la ecuación de la recta típicamente representada por $y = mx + b$

a) $m$ corresponde a la **pendiente** de la recta. Está relacionada con la inclinación de la misma. Su signo es positivo si al aumentar el valor de $x$ también aumenta el valor de $y$. Su signo es negativo si al aumentar el valor de $x$ disminuye el valor de $y$. Su magnitud es proporcional al grado de inclinación de la recta. De esta forma, indica cuánto aumenta o disminuye la recta en el eje $Y$ al moverse una cantidad dada en el eje $X$. La pendiente tiende a infinito conforme el ángulo de la recta con el eje $X$ se aproxima a 90 grados.

b) $b$ corresponde a la **ordenada al origen**; es el valor que adopta $y$ cuando $x$ vale cero. En otras palabras, corresponde a la distancia entre el origen y el punto en el cual la recta cruza el eje vertical. De esta forma, es una medida de qué tan arriba o abajo se encuentra la recta en cuestión.

***Relación entre parámetros de rectas y su paralelismo o perpendicularidad***

Ahora que has recordado los parámetros de la recta, observa el **recurso interactivo** en donde se muestran dos rectas, que bien pueden ser paralelas o perpendiculares. Elige si las rectas han de ser paralelas o perpendiculares. Intenta determinar qué propiedades deben tener sus respectivos parámetros para que se cumpla que sean paralelas, perpendiculares o ninguna de las anteriores. Usa las lupas en la esquina inferior de la gráfica para controlar la

escala de la misma. Disponible en el Taller de Matemáticas, en el tema "Nociones de paralelismo y/o perpendicularidad" en el apartado de desarrollo, pestaña 1.
[http://campusvirtual.cua.uam.mx/material/tallerm/14_Paralelismo_Perpendicularidad_html/index.html#](http://campusvirtual.cua.uam.mx/material/tallerm/14_Paralelismo_Perpendicularidad_html/index.html#)

En el ejercicio interactivo "Relación entre parámetros de rectas y su paralelismo o perpendicularidad", te darás cuenta que:

Los segmentos verde y naranja son una forma de ver la pendiente. Es decir, la puedes obtener dividiendo el segmento vertical entre el horizontal, y el signo será positivo si el valor en $y$ (la vertical) aumenta cuando aumenta el de $x$ (la horizontal). Por otro lado, el signo será negativo si el valor en $y$ disminuye cuando aumenta el de $x$. Algunos puntos de interés que puedes notar del triángulo que se forma con los 2 segmentos y el pedazo de recta subtendido por ellos es:

En el caso de las rectas paralelas el triángulo es el mismo y, de hecho, no presenta rotación. Solamente se encuentra desplazado verticalmente, como pudiste notar al presionar el botón 'Intercambiar'. El que sea el mismo implica que la pendiente es la misma en rectas paralelas. Expresándolo matemáticamente, si la pendiente de la primera recta es $m_1$ y la pendiente de la segunda recta es $m_2$ y las rectas son paralelas, entonces:

$$m_1 = m_2 \qquad \text{Ecn.49}$$

En el caso de las rectas perpendiculares también obtienes el mismo triángulo, pero ahora no sólo está desplazado. El tamaño del lado del triángulo que antes era horizontal es ahora el tamaño del lado vertical. Y el tamaño del lado que antes era vertical ahora es el tamaño del horizontal. Es eso lo que sucede al intercambiar el numerador y denominador para pasar de la pendiente de una recta a la pendiente de su perpendicular. Esa inversión entre numerador y denominador la puedes lograr tomando el inverso de la fracción en cuestión.

Adicionalmente al caso de las rectas perpendiculares, si la recta original está inclinada a la derecha, la perpendicular estará inclinada a la izquierda y viceversa. Eso implica que la pendiente de la recta perpendicular tendrá el signo opuesto al de la original.

- Los dos puntos anteriores se pueden resumir, para las rectas perpendiculares, la relación entre las pendientes es

  $$m_1 = -\frac{1}{m_2} \qquad \text{Ecn.49}$$

  Donde nuevamente $m_1$ es la pendiente de una de las rectas y $m_2$ es la pendiente de su perpendicular. Otra forma de verlo es que si las rectas son perpendiculares,

  $$m_1 m_2 = -1 \qquad \text{Ecn.50}$$

- Si las pendientes respectivas de dos rectas no cumplen ninguna de las fórmulas mencionadas arriba, no serán ni perpendiculares ni paralelas.

Ahora ya tienes los criterios que determinan que las rectas sean paralelas o perpendiculares entre sí. Estos criterios dependen de la pendiente. ¡Claro, la pendiente es una forma de expresar la inclinación, y es la inclinación la encargada de determinar el ángulo entre las rectas! Es por eso que sólo depende de la pendiente y no de la ordenada al origen. Esta última sólo se encarga de desplazar la recta (sea paralela o perpendicular) hacia arriba o hacia abajo.

***Determinación de una recta paralela o perpendicular dadas algunas de sus condiciones***
***Recordatorio sobre construcción de una recta***

Definir si las rectas paralelas o perpendiculares dependen sólo de sus pendientes. El papel de la ordenada al origen $b$ es únicamente desplazar la recta hacia arriba o hacia abajo. Esto quiere decir que puede haber muchísimas (de hecho, infinitas) rectas que son paralelas o perpendiculares a una recta dada (solamente cambiando el desplazamiento vertical de las rectas). Sin embargo, algunas veces se requiere de una recta paralela o perpendicular específica. Es ahí donde entra el papel de la ordenada al origen.

Por ejemplo, se te podría pedir que encontraras una recta perpendicular a otra y que pase exactamente por un punto dado. En ese caso, de las infinitas rectas perpendiculares que existen, sólo una es la buena (la que pasa por el punto dicho).

Usemos un ejemplo concreto a manera de recordatorio de cómo construir una recta dadas ciertas condiciones. Imagina que tienes que encontrar una recta de pendiente $m$=3 y que pasa por el punto con coordenadas (2,10). Por un lado, sabemos que esas coordenadas ($x$=2 y $y$=10) deben satisfacer la ecuación de la recta $y$=3$x$+$b$. Sustituyendo dichas coordenadas, tenemos,

$$10 = 3(2) + b \qquad \text{Ecn.51}$$

Despejando la ordenada al origen obtenemos que

$$b = 10 - 6 \qquad \text{Ecn.52}$$

Y por lo tanto, $b$=4. Así pues, la ecuación de la recta que satisface dichas condiciones es,

$$y = 3x + 4 \qquad \text{Ecn.53}$$

***Construcción de rectas paralelas bajo condiciones dadas***

En el siguiente **interactivo** que tendrás que realizar, podrás ver paso a paso la construcción de una recta a partir de condiciones dadas.
Disponible en el Taller de Matemáticas, en el tema “Nociones de paralelismo y/o perpendicularidad” en el apartado de desarrollo, pestaña 2.
http://campusvirtual.cua.uam.mx/material/tallerm/14_Paralelismo_Perpendicularidad_html/index.html#

Elige, en el interactivo, si deseas obtener la paralela o perpendicular a una recta dada, y que pasa por un punto dado. Los botones 'Siguiente' y 'Anterior' te permitirán avanzar o retroceder en la explicación. Las lupas dentro del plano cartesiano a la derecha se pueden usar para cambiar la escala del gráfico.

Ahora ya puedes construir ecuaciones de rectas que sean perpendiculares o paralelas a otra y que satisfacen una condición (pasan por un punto determinado).

### *Tipos de problemas*

Una gran parte de los problemas relacionados con el tema de paralelismo y perpendicularidad son de la naturaleza del ejemplo anterior. Otra gran parte es el determinar si dos rectas son paralelas, perpendiculares, o no cumplen con ninguna de ambas condiciones. Pero eso ya lo sabes hacer: lo único que tienes que hacer es comparar sus pendientes y determinar la relación entre ellas. Algunas veces, sin embargo, no se te dará la recta directamente, pero de las unidades que has visitado previamente relacionadas a la recta, tú podrás construir tu ecuación a partir de los datos dados. Más adelante, en las páginas de ejercicios, abordarás una buena cantidad de actividades como las mencionadas anteriormente.

### *Pendiente entre rectas*

Cuando hablamos de la pendiente de una recta, hablamos del grado de inclinación de la misma **respecto al eje *X***. Pero resulta que también puedes hablar de qué tan inclinada es una recta respecto a otra que no sea horizontal como el eje *X*. ¿Será posible conocer una pendiente entre rectas a partir de sus pendientes individuales (esto es, a partir de sus pendientes respecto al eje *X*)? Resulta ser que sí existe una fórmula para tal efecto. Si las rectas individuales tienen pendientes $m_1$ y $m_2$ respectivamente, la pendiente entre ambas estará dada por $m_3$, donde,

$$m_3 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \qquad \text{Ecn.54}$$

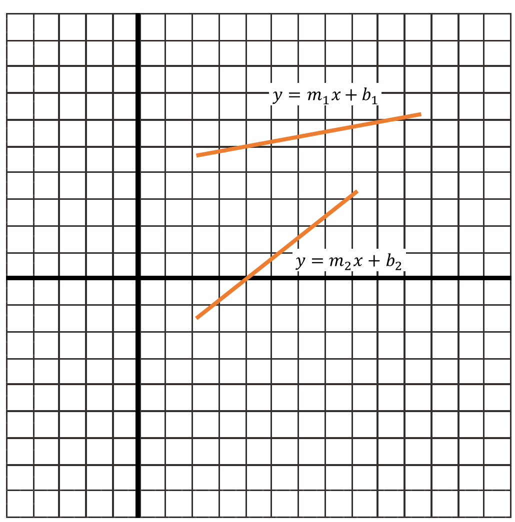


Figura 35. Dos recta con pendientes distintas, $m_1$ y $m_2$

La deducción de esta fórmula requiere de unas cuantas manipulaciones de identidades trigonométricas que están fuera del alcance de esta unidad, pero la usaremos para reafirmar nuestros conceptos de paralelismo y perpendicularidad.

Para ejemplificar lo anterior, es importante que entres al **ejercicio interactivo** disponible en el Taller de Matemáticas, en el tema "Nociones de paralelismo y/o perpendicularidad" en el apartado de desarrollo, pestaña 3.
http://campusvirtual.cua.uam.mx/material/tallerm/14_Paralelismo_Perpendicularidad_html/index.html#

Te darás cuenta que en este, cuentas con un par de rectas. Puedes hacer girar ambas alrededor del punto donde se intersecan y verás este concepto de pendiente entre rectas.

Escoge una inclinación para tus rectas arrastrando el punto $P_1$ y $P_2$. Avanza en la explicación con el botón 'Siguiente' o retrocede en la misma con 'Anterior'. Observa las pendientes de cada recta ($m_1$ y $m_2$) y la pendiente entre ambas ($m_3$).

Observarás que cuando mueves una recta tal que se aproxima a ser la perpendicular de la otra, el valor de $m_3$ se va haciendo más y más grande en magnitud (independientemente de su signo) hasta llegar a ser más (o menos) infinito para el caso completamente perpendicular. Por otra parte, nota que cuando mueves una de las rectas de tal forma que sea cada vez más paralela a la otra, $m_3$ se aproxima más a cero en magnitud (sin importar su signo).

***Análisis de paralelismo y perpendicularidad desde la fórmula de la pendiente entre rectas***

Analicemos ahora el comportamiento de $m_3$ antes mencionado:

Cuando las rectas son **perpendiculares**, $m_3$ se va a + o - infinito. Ello se debe a que el denominador de la fracción que representa a $m_3$ se aproxima más y más a cero. Pero eso sólo pasa si $1+m_2m_1=0$. Si despejamos de ahí a $m_2$, obtenemos que $m_2=-1/m_1$. ¡Que es exactamente la condición inicial que obtuvimos para rectas perpendiculares!

Cuando las rectas se aproximan a ser **paralelas**, $m_3$ se aproxima cada vez más a cero. Pero eso sólo pasa cuando el numerador de la fracción que representa a $m_3$ se vuelve cero. Esto es, $m_2-m_1=0$. Despejando de ahí a $m_2$ obtenemos que $m_2=m_1$ ¡que es justo la condición inicial que obtuvimos para rectas paralelas!

En algunos casos, como cuando una de las rectas es **paralela al eje *Y***, el valor de $m_3$ no está definido pues te queda infinito tanto en el numerador como en el denominador.

Observa que cuando una de las rectas es horizontal (digamos, $m_1$=0), entonces

$$m_3 = \frac{m_2 - 0}{1 + m_1(0)} \qquad \text{Ecn. 55}$$

De donde se obtiene que $m_3=m_2$.

Recuperaste la expresión común para la **pendiente de una recta respecto al eje *X***. Claro, con la pendiente $m_1=0$, esa recta horizontal está actuando como el eje $X$ para todo fin práctico. Igualmente, cuando la pendiente de una recta es infinita, implica que es vertical (o, visto de otra forma, perpendicular al eje $X$). Cuando usas la expresión para obtener la pendiente entre rectas, es lógico que también te dé infinito cuando una es perpendicular a la otra. Ahora que ya has visto suficiente sobre la relación entre pendientes de rectas paralelas y perpendiculares, avanza a la parte de ejercicios.

## Referencias


[1] Taller interactivo de Matemáticas. Campus virtual UAM- Cuajimalpa. Disponible en: http://campusvirtual.cua.uam.mx/material/tallerm/14_Paralelismo_Perpendicularidad_html/index.html

[2] Olvera, R. Plano cartesiano y la recta. UAM Cuajimalpa.