12. Las rectas y su uso para la resolución de problemas

Los problemas que involucran valores (o representación de los mismos) son, en el fondo, problemas matemáticos. Por lo mismo, pueden representarse en lenguaje matemático.
Este lenguaje es útil debido a la facilidad de manipulación de las cantidades en cuestión.
Probablemente has resuelto algún problema mentalmente en el pasado (tal vez encontrar el valor de un impuesto, o quizá encontrar cuánto debe cierta persona en una cuenta de restaurante dependiendo de qué proporción consumió, etcétera). Aunque no te hayas percatado explícitamente de cómo lo resolviste, en el fondo usaste matemáticas. No obstante, no todos los problemas se pueden resolver tan fácilmente, y algunos requieren de manipulaciones algebraicas que muchas veces es necesario escribir en papel. Dichos problemas son los que principalmente abordaremos en esta unidad.

Tal vez te convenga, antes de abordar lo que vamos a estudiar en este tema, repasar las unidades *Ecuaciones de primer grado*, *Ecuación de la recta y sus propiedades geométricas*, *Solución de problemas mediante ecuaciones de primer grado* y *Sistemas de ecuaciones lineales*, las puedes encontrar en el material interactivo del Taller de Matemáticas, disponible en: http://campusvirtual.cua.uam.mx/plataforma/tallerm.En especial, en la última, encontrarás una variedad de problemas, así como estrategias de solución que se usarán en la presente unidad.

Estableciendo la ecuación de una recta para un problema

Recordatorio de pendiente y ordenada al origen

Como bien recordarás, de las unidades que abordan dicho concepto, la **pendiente** es una medida de la inclinación de una recta respecto al eje horizontal. Esta se suele denotar por la letra m en la ecuación de la recta $y=mx+b$. La **ordenada al origen** b es el valor de las ordenadas (eje vertical o eje Y) cuando la coordenada x vale cero. Otra forma de verlo es que es el valor del eje Y en el punto donde la recta cruza dicho eje.

Significado de la recta

La recta, expresada algebraicamente como $y=mx+b$, es un conjunto infinito de pares de coordenadas (x, y). Y todos estos pares se dice que satisfacen la igualdad. Por ejemplo, para la recta

$$y = 3x + 2$$

el punto $(1,5)$ es una solución de la recta. Esto es, si sustituyes los valores en la ecuación, la igualdad debe satisfacerse. Los valores a sustituir son,

$$x = 1$$
$$y = 5$$

Quedando,

$$5 = 3(1) + 2$$
$$5 = 5$$

De esta manera queda comprobado que el punto (1,5) pertenece a la recta. Ahora intenta comprobar con el punto (2,8). En el caso del punto (3,10), se puede comprobar que no pertenece a la recta, sustituyendo:

$$10 = 3(9) + 2$$
$$10 \neq 29$$

Por lo tanto, el punto (3,10) no es solución de esa recta. Gráficamente, ese punto quedaría fuera de la línea que representa la recta en el plano cartesiano. Con lo anterior debe quedar claro que la recta puede tener una infinidad de puntos.

Una recta puede dar información parcial de un problema, mientras que otra recta da otra información. Llamemos a la primera recta r_1 y a la segunda r_2. Si esas rectas se cruzan en un punto, de la infinidad de puntos que satisfacen la ecuación de r_1, sólo uno satisfará simultáneamente a r_2. Este punto es solución de ambas. Como se mencionó, esta situación únicamente ocurre si se cruzan en un solo punto. De las unidades anteriores recordarás que ello ocurre si las rectas tienen pendientes distintas. Dos rectas que tienen pendiente igual pueden ya sea nunca cruzarse (en cuyo caso nunca encontrarás solución), o bien, si son idénticas (tienen, además de igual pendiente, igual ordenada al origen) se cruzan en todos los puntos y todos los puntos son solución, por lo que no encontrarás una solución única sino una infinidad de ellas.

Algunos ejemplos

A continuación, te pedimos visites la página del taller interactivo del taller de matemáticas, para que veas los cinco ejemplos que ahí se te presentan y te quede más claro el tema. Estos los encontrarás en el apartado de desarrollo, pestaña 1. Disponible en: http://campusvirtual.cua.uam.mx/material/tallerm/15_Interseccion_Rectas_html/index.html#

Nota que en todos esos ejemplos planteaste 2 distintas rectas. Posteriormente, usaste un método para calcular el valor de tus variables o incógnitas (por ejemplo, el método de igualación de ecuaciones que ya has visto en la unidad de *Sistemas de ecuaciones de primer grado*). Como ya sabes, cualquier método es válido. Siempre que hagas tus cálculos bien, obtendrás el mismo resultado. Puedes comprobar esto intentando resolver el sistema de ecuaciones de un mismo problema por otro método que el propuesto.

Por otra parte, nota que en los problemas se piden dos valores, uno para la x y otro para la y. Por ello, es importante saber qué cosa estás representando en cada una de las variables y no confundirte. Esto te ayudará a plantear tu sistema de ecuaciones de forma consistente y, por ende, a obtener los resultados correctos.

También observa que, en el problema de Alberto, no usamos las variables típicas x y y para representar las abscisas y las ordenadas, respectivamente. Aquí, cambiamos la incógnita de las ordenadas de y a w. Te darás cuenta de que, al resolver problemas, no necesariamente querrás emplear la x y la y como variables; puedes usar cualquier letra que gustes. Otro ejemplo son las letras alfa y beta en el problema de los ángulos. Finalmente, cuando lleves la solución al plano cartesiano, observarás que los ejes que usaste no son, entonces, el típico x y y.

Es importante también estar seguro del resultado. Una forma de comprobarlo es sustituir los valores encontrados de ambas variables **en las 2 ecuaciones**. ¿Por qué en ambas ecuaciones? Porque puede ser que erróneamente hayas encontrado un par de valores que caigan bien en, digamos, la primera ecuación (recuerda que para una sola ecuación, hay una infinidad de pares de puntos que la satisfacen). Pero sólo si también satisface la otra ecuación habrá seguridad de que es el punto correcto.

Ya habrás notado que ubicar la intersección de rectas es un poderoso método para resolver muchos problemas. Aunque queda fuera del alcance de esta unidad, algunos de estos métodos (como, por ejemplo, la sustitución) te permiten resolver sistemas de ecuaciones no necesariamente lineales (o sea, donde alguna de las ecuaciones no necesariamente es una recta). Adicionalmente, con ellos puedes resolver (con algunos pasos agregados) sistemas de ecuaciones lineales de 3 variables.

Ubicando inconsistencias

Análisis de los problemas

Como habrás revisado en las otras unidades sugeridas, algunas veces no encontrarás una respuesta para tus problemas. Otras veces, podrás encontrar una respuesta numérica al problema, pero cuya interpretación en el contexto del problema no tiene sentido.

Es importante tratar de encontrarle el sentido a los datos del problema. Ello se debe a que te puedes ahorrar los cálculos, muchas veces, si detectas la inconsistencia desde el planteamiento del problema.

Abordemos, nuevamente, los problemas vistos con anterioridad pero ahora analizando las posibles inconsistencias que estos puedan presentar. Para hacerlo, te pedimos, que una vez más leas detenidamente los cinco problemas que se encuentran en el apartado de desarrollo, pestaña 2 y trata de ubicar si hay información inconsistente o ilógica en el problema. Posteriormente, avanza en la explicación de su solución con el botón 'Siguiente', o retrocede en la misma con el botón 'Anterior'. Procura hacer más de un ejemplo de cada tipo, pues algunos pueden tener diferentes tipos de respuesta.

Disponible en:

http://campusvirtual.cua.uam.mx/material/tallerm/15_Interseccion_Rectas_html/index.html#

Análisis de las inconsistencias

Como notaste, en esos ejemplos, la resolución del sistema de ecuaciones generará valores determinados para tus incógnitas, siempre y cuando tus rectas no sean paralelas (como lo observaste también en la unidad sobre solución de ecuaciones de primer grado con una incógnita). No obstante, hay que tener la habilidad para notar si hay o no sentido en la respuesta que encuentres.

Muchas veces, el mismo resultado te parecerá ilógico cuando te enfrentes a estos casos. Pero siempre es buena idea volver a trazar tus pasos para confirmar que no cometiste un error. De haberlo hecho correctamente, quiere decir que hay algún error en el planteamiento del problema.

Para ahorrarte estos pasos, a veces también puedes detectar el error en el planteamiento (como viste en el interactivo) desde la lectura del mismo. Cabe decir que no siempre es tan trivial, y en algunos problemas tendrás que llegar a la inconsistencia de tu solución para notar el error en el planteamiento. Aborda ahora la parte de los ejercicios.

Referencias

[1] Taller interactivo de Matemáticas. Campus virtual UAM- Cuajimalpa. Disponible en: http://campusvirtual.cua.uam.mx/material/tallerm/15_Interseccion_Rectas_html/index.html#

[2] Olvera, R. Plano cartesiano y la recta. UAM Cuajimalpa.