La parábola

En la unidad anterior se trabajó con la línea recta en el plano cartesiano.
Se enseñaron las ecuaciones que representan a la recta, la ecuación general:

$$Ax + By + C = 0 \qquad \text{Ecn. 1}$$

Y la ecuación principal:

$$y = mx + b \qquad \text{Ecn.2}$$

Como puedes ver son ecuaciones de primer orden con respecto a la variable ***x*** y ***y***.

En esta unidad se introduce un elemento geométrico llamado parábola. La importancia de conocer la ecuación se debe a las aplicaciones que puedes encontrar en matemáticas, física o ingeniería.

La parábola es una curva relacionada con la ecuación cuadrática, es decir, se representa como una ecuación de grado dos con respecto a la variable x o la variable y, pero no las dos al mismo tiempo ya que dependiendo de la variable cuadrática que se tenga la parábola se oriente en el plano cartesiano de forma vertical u horizontal. Ver **figura 1**.

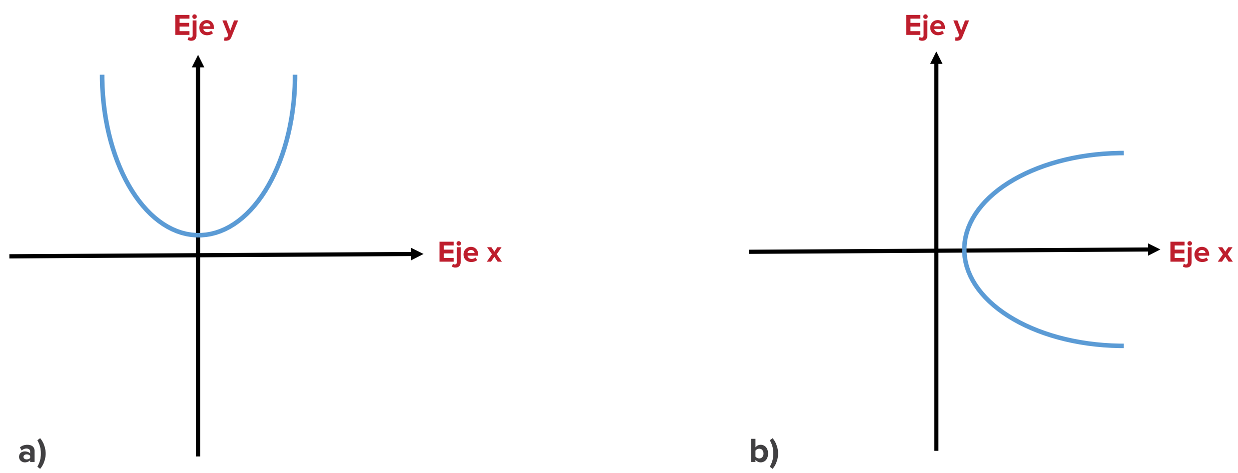

Figura 1. La variable cuadrática define el sentido de la parábola, puede ser vertical (a) abriendo los brazos en la dirección positiva (o negativa) del eje y. Y la parábola horizontal (b) puede abrir los brazos en la dirección positiva (o negativa) del eje x.

Al definir en el plano cartesiano las variable x como la abscisa y la variable y como la ordenada, las ecuaciones generales de la parábola se expresan como:

La ecuación de la parábola vertical:

$$Ax^2 + Bx + Cy + D = 0 \qquad \text{Ecn. 3}$$

La ecuación de la parábola horizontal:

$$Ay^2 + By + Cx + D = 0 \qquad \text{Ecn. 4}$$

Donde ***A, B, C*** y ***D*** son constantes.

En semejanza de lo que sucedió con la ecuación principal de la recta donde se pueden identificar los parámetros como la pendiente (m) y la ordenada al origen (b).

De forma semejante la ecuación general de la parábola vertical se puede reescribir para tener lo que se conoce como la forma ordinaria de la ecuación de la parábola:

$$y - k = \frac{(x - h)^2}{4p} \qquad \text{Ecn. 4}$$

Nuevamente se tiene una ecuación con tres parámetros que nos ayudan a describir la parábola en el plano, estos parámetros son k, h y p. Antes de describirlos será necesario conocer otros elementos que son básicos para su representación:

- **Eje de simetría:** Es una línea recta que divide simétricamente a la parábola en dos brazos y pasa por el vértice.

- **Vértice (V):** Punto de la parábola que coincide con el eje de simetría y tiene coordenadas (h,k).

- **Foco (F):** Es un punto situado sobre el eje de simetría dentro de los brazos que forma la parábola y que se encuentra a una distancia (p) de vértice.

- **Distancia focal (p):** Parámetro de la ecuación de la parábola y el indica la distancia que existe entre el vértice y el foco (F).

- **Directriz (d):** Es una línea recta perpendicular al eje de simetría y se encuentra fuera de los brazos que forman la parábola. Esta línea se encuentra a una distancia focal (p) del vértice.

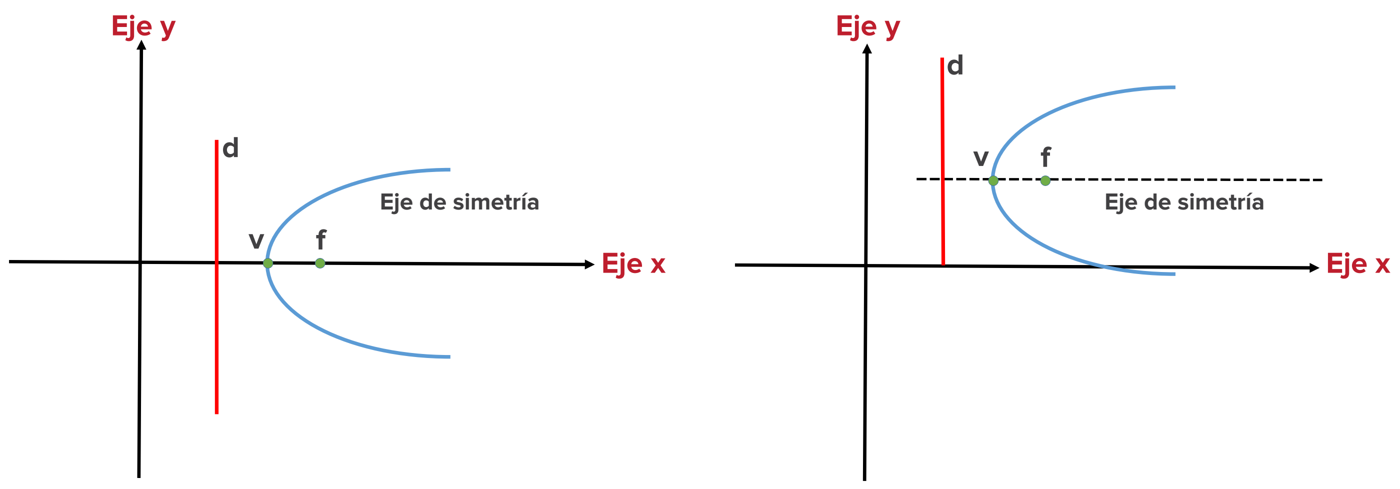

Figura 2. Distintos elementos de la parábola y su orientación en el plano cartesiano.

Con base en las definiciones anteriores y la ecuación 4 se pueden observar que esta ecuación tiene los parámetros, h, k y p y que de forma directa te dan la información de las coordenadas del vértice y la distancia focal. Los otros elementos de la parábola se pueden obtener siguiendo las definiciones y la figura 2.

Otra característica de la parábola, como lugar geométrico, es que cada punto en la parábola es equidistante al foco y a la directriz, ver figura 3

Figura 3. La distancia que existe del foco a un punto en la parábola es la misma que hay del punto a la directriz.

Para poder obtener la ecuación ordinaria a partir de una ecuación general, se debe aplicar el método de completar el trinomio cuadrado perfecto. Ejemplo, la ecuación general de una parábola está dada por:

$$3x^2 - 24x + 12y + 30 = 0 \tag{Ecn.5}$$

Para obtener la ecuación ordinaria se lleva a cabo el siguiente procedimiento:

$$3x^2 - 24x = -12y + 30 \tag{Ecn.6}$$

Separando variables:

$$x^2 - 8x = -4y + 10 \tag{Ecn.7}$$

Completando el trinomio cuadrado perfecto:

$$x^2 - 8x + 16 - 16 = -4y + 10 \tag{Ecn.8}$$

Se reescribe como:

$$(x - 4)^2 - 16 = -4y + 10 \tag{Ecn.9}$$

Se manipula la ecuación para obtener la forma ordinaria de la ecuación de parábola,

$$(x - 4)^2 = -4y + 10 + 16 \tag{Ecn.10}$$

$$(x - 4)^2 = -4y + 26 \tag{Ecn.11}$$

$$(x - 4)^2 = -4(y - 6.5) \tag{Ecn.12}$$

$$y - 6.5 = \frac{(x - 4)^2}{-4} \tag{Ecn.13}$$

De esta última ecuación se puede, entonces, obtener información de la parábola y conseguir su representación gráfica.

Así como se logró la ecuación de la parábola ordinaria a partir de la ecuación general, se puede aplicar un procedimiento de desarrollo de la ecuación ordinaria para llegar a la forma general.

Ahora, es importante que realices los ejercicios ubicados en la plataforma con los cuales podrás relacionar las ecuaciones general y ordinaria de la parábola, y sus parámetros.

Ejercicio interactivo 1. Realiza los ejercicios sobre parábolas verticales que se encuentran en la pestaña 3. Disponible en:

http://campusvirtual.cua.uam.mx/material/tallerm/20_Parabola_Vertical_html/index.html